Задача 1. Волновое уравнение

Часть 1. Математическая

Одномерной волной называется зависимость $f = f(x,t)$ какой-либо физической величины от координаты и времени, удовлетворяющая одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Здесь c – скорость волны.

Волновое уравнение линейно, следовательно, оно подчиняется принципу суперпозиции: если две функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$ являются решениями волнового уравнения, то их любая линейная комбинация $h(x,t) = \alpha f(x,t) + \beta g(x,t)$ тоже является его решением.

Можно показать, что любая функция вида $f(x,t) = F(x + \mathrm{c}t)$ или $g(x,t) = G(x - \mathrm{c}t)$ является решением волнового уравнения. При этом $g(x,t) = G(x - \mathrm{c}t)$ задает волну, бегущую направо, а $f(x,t) = F(x + ct)$ задает волну, бегущую налево.

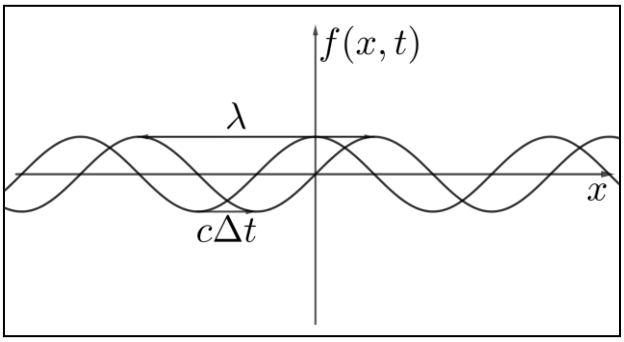
1.1 Перейдите в волновом уравнении к координатам $u = x + ct$ и $v = x - ct$. Для этого используйте формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = c\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

1.2 Покажите, что произвольное решение волнового уравнения является суммой волны, бегущей направо, и волны, бегущей налево.

1.3 Гармонической волной угловой частоты ω называется волна, в каждой точке x_0 которой $f(x_0,t) = A\sin(\omega t + \varphi(x_0))$. Найдите общее выражение $f(x,t)$ для гармонической волны угловой частоты ω, бегущей вправо.

Частота гармонической волны $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ – это частота гармонических колебаний функции f в каждой точке пространства. Длина волны λ – это расстояние между двумя соседними максимумами волны в фиксированный момент времени. Часто используется величина $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, которая называется волновым числом.



1.4 Найдите связь между частотой волны ν и ее длиной λ.

Рассмотрим теперь трехмерный случай. Пусть $f = f(x,y,z,t) = f(\vec{r},t)$. Волновое уравнение в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Аналогично одномерному случаю, в трехмерном случае волновое уравнение подчиняется принципу суперпозиции.

Рассмотрим гармоническую волну, распространяющуюся в заданном направлении. Для такой волны функция f меняется в пространстве только в одном направлении, то есть, зависит только от проекции $\vec{r}$ на это направление. Определим волновой вектор $\vec{k}$ как вектор, направленный вдоль направления распространения волны и равный по модулю $\frac{2\pi}{\lambda}$.

1.5 Напишите $f(\vec{r},t)$ для гармонической волны, имеющей волновой вектор $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$.
1.6 Найдите зависимость частоты гармонической волны от ее волнового вектора.

Часто бывает удобно работать с волнами, представляя их в комплексной форме:

$$\hat{f}(x,t) = \hat{A}e^{i(kx-\omega t)}$$

Комплексная константа $\hat{A}$ задает как амплитуду, так и фазу волны:

$$\hat{A} = Ae^{i\varphi}, \text{ где } A \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$$

При этом подразумевается, что наблюдаемая величина – это действительная часть комплексной величины $\hat{f}$:

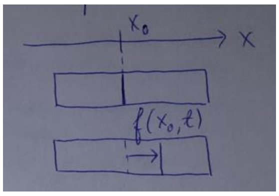
$$f(x,t) = \operatorname{Re}\left(\hat{f}(x,t)\right) = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

1.7 Рассмотрим волну, имеющую комплексную запись

$$\hat{f}(x,t) = Ae^{\frac{i\pi}{3}}e^{i(kx-\omega t)}.$$

Найдите $f(x,t)$.

Часть 2. Механические волны

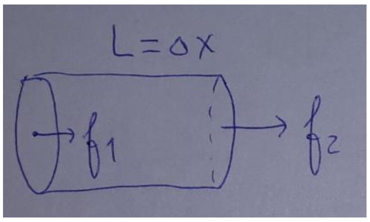


Рассмотрим одномерное движение (все величины зависят от x, t) бесконечной упругой среды с модулем Юнга E и плотностью ρ. В такой среде распространяются продольные волны, в которых смещения всех точек направлены вдоль координаты x. Рассмотрим какую-то точку среды. Она совершает периодические колебания вокруг положения равновесия x_0:

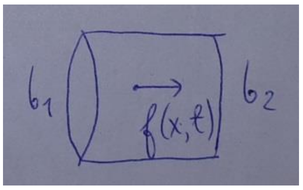
$$x(t) = x_0 + f(t)$$

где функция $f(t)$ есть смещение точки. Будем нумеровать точку ее положением равновесия x_0. Тогда смещения всех точек можно описать одной функцией $f(x_0, t)$. В дальнейшем мы не будем писать индекс «0».

Выведем уравнение на функцию $f(x,t)$.



2.1 Мысленно выделим в среде цилиндр длины Δx. Найдите его относительное удлинение ε в данный момент времени. Перейдя к пределу $\Delta x \to 0$, выразите ε через производную $\frac{\partial f}{\partial x}$.
Используя закон Гука, найдите механическое напряжение (силу на единицу площади) в среде.



2.2 Снова выделим в среде цилиндр длины Δx. Зная механические напряжения на его концах, напишите второй закон Ньютона для этого цилиндра.
2.3 Покажите, что получившееся уравнение является волновым уравнением. Найдите скорость звука в этой среде.

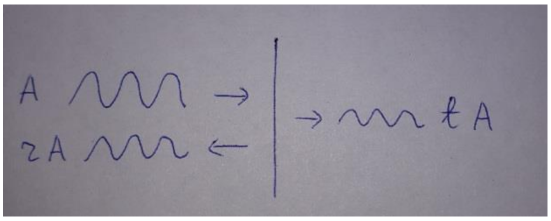
2.4 Пусть в среде распространяется волна вида $f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$. Найдите объемные плотности $\frac{dW}{dV}$ кинетической и потенциальной энергии такой волны. Постройте их графики вместе с графиком $f(x,t)$ в момент времени $t_0 = 0$.

2.5 Поток энергии в волне равен произведению плотности энергии на скорость волны. Найдите поток энергии волны с амплитудой A. Усредните его по времени.

Рассмотрим теперь бесконечную среду, состоящую из двух частей с модулями Юнга E_1 и E_2 и одинаковой плотности ρ. Первая часть занимает полупространство $x \le 0$, вторая – оставшееся полупространство $x \ge 0$. Пусть $f_l(x,t)$ задает смещение первой среды, $f_r(x,t)$ - смещение второй.

2.6 На границе раздела смещения двух сред одинаковы. Напишите соответствующее граничное условие.

2.7 Получите второе граничное условие, применив второй закон Ньютона к бесконечно малому объему среды на границе.



Пусть на границу раздела двух сред слева падает гармоническая волна с амплитудой A. Она частично отражается от границы и частично проходит через нее. Обозначим амплитуды отраженной и прошедшей волн rA и tA соответственно. Таким образом, в левом полупространстве существуют падающая волна, распространяющаяся вправо, и отраженная волна, распространяющаяся влево. В правом полупространстве есть только прошедшая волна, распространяющаяся вправо.

2.8 Выразите амплитуды прошедшей и отраженной волн через амплитуду падающей волны. Используйте для решения комплексную запись.

2.9 Проверьте верно ли равенство $r + t = 1$?

2.10 Проверьте верно ли равенство $r^2 + t^2 = 1$?

2.11 Вычислите усредненные по времени потоки энергии падающей, прошедшей и отраженной волн и напишите **правильный** закон сохранения энергии. Убедитесь, что он выполняется.

Часть 3. Электромагнитные волны

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в вакууме вдоль оси z. Задача одномерна, то есть, все величины зависят только от координаты z. Электромагнитное поле будем задавать вектором напряженности электрического поля $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$ и вектором индукции магнитного поля $\vec{B} = \vec{B}(z,t)$. Запишем уравнения Максвелла для поля в вакууме в интегральной форме:

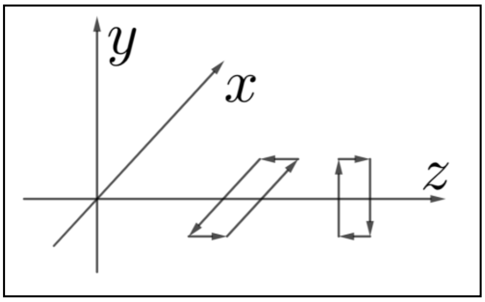
$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$\oint_l \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$

3.1 Покажите, что составляющие E_z и B_z – константы.



3.2 Рассмотрим малый прямоугольный контур, расположенный в плоскости xz, со сторонами, параллельными осям x и z. Запишите для этого контура 3е и 4е уравнения Максвелла и получите дифференциальные уравнения для составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

3.3 Проделайте то же самое для аналогичного контура, расположенного в плоскости yz. Получите две независимые системы дифференциальных уравнений на (E_x, B_y) и (E_y, B_x).

3.4 Используя полученные в пункте 3.3 уравнения, покажите, что электрическое и магнитное поля описываются волновым уравнением.

3.5 Выразите скорость света через постоянные μ_0 и ε_0.

Рассмотрим гармонические электромагнитные волны частоты ω, распространяющиеся в положительном направлении оси z. Пусть электрическое поле имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(kz - \omega t + \varphi).$$

3.6 Найдите направление, амплитуду и фазу магнитного поля, если поле E направлено вдоль оси a)x или b)y. Нарисуйте на одном графике зависимости E и B от координаты в момент времени $t_0 = 0$.

3.7 Найдите плотность энергии электрического и магнитного полей и плотность потока энергии в этих двух случаях. Изобразите на графике зависимости этих трех величин от координаты z в момент времени $t = 0$.

Общее решение волнового уравнения – это сумма двух решений. В первом поле E направлено вдоль оси x, во втором – вдоль оси y. Пусть амплитуда первого равна A_x, второго A_y, разность фаз $\Delta\varphi$.

3.8 Для каждого из следующих частных случаев нарисуйте зависимость векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ от времени в данной точке пространства. Для этого нарисуйте траекторию конца вектора, откладываемого от данной точки.

a. $\Delta\varphi = 0, A_x = 1, A_y = 3$
b. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, A_x = A_y = 1$
c. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}, A_x = A_y = 1$