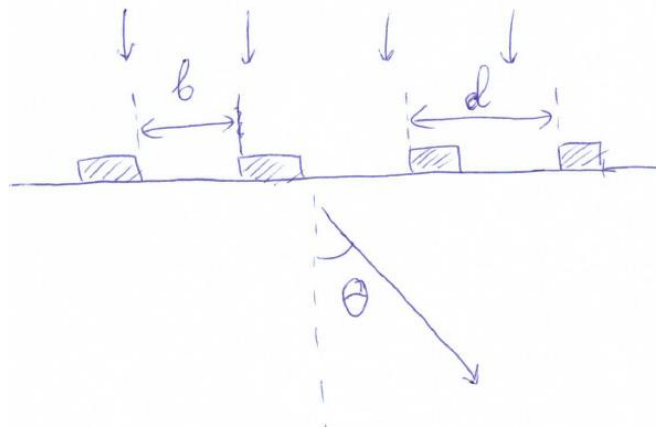


Задача 3. Дифракционная решетка

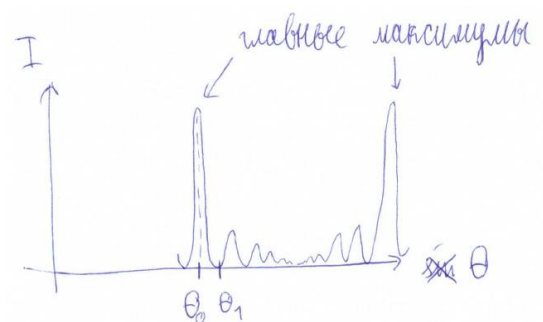
Рассмотрим дифракционную решетку – периодическую структуру из N одинаковых участков. Расстояние между повторяющимися элементами d известно. Оно называется периодом решетки. В дальнейшем мы будем называть каждый из повторяющихся участков штрихом дифракционной решетки. Свет падает на решетку перпендикулярно ее поверхности. Дифракционная картина от решетки наблюдается на экране, находящемся на большом расстоянии от нее, так что разность хода между лучами перестает зависеть от расстояния до решетки. На практике этого можно добиться, сфокусировав параллельно идущие лучи на экране с помощью линзы. Длина волны излучения равна λ . Для удобства записи формул можно также использовать волновое число k .



1. Найдите разность фаз между лучами, исходящими от двух соседних штрихов решетки под углом θ .

2. Считая известной зависимость интенсивности излучения одного штриха решетки от угла известной, вычислите зависимость интенсивности излучения всей решетки от угла. Для этого нужно просуммировать амплитуды излучения от всех периодов с учетом соответствующего сдвига фаз.

3. Главным максимумом называется такой максимум интенсивности (как функции угла), в котором разности хода для излучения от двух соседних штрихов равно целому числу длин волн. Найдите углы, под которыми наблюдаются главные максимумы. Чему равно отношение интенсивности излучения в главном максимуме к интенсивности излучения от одного штриха в направлении главного максимума? Получите его непосредственно из полученной формулы для интенсивности.



4. Сколько максимумов находится между двумя главными максимумами (эти максимумы называют побочными)?

5. Найдите отношение интенсивностей главного максимума и ближайшего к нему побочного максимума.

6. Найдите зависимость интенсивности излучения от угла для дифракции на одной щели. Перейдите в ответе предыдущего пункта к пределу бесконечно малого периода решетки,

считая что при этом число периодов решетки возрастает так, что ее общая длина не меняется ($N \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$, $Nd = L = const$). Считайте, что амплитуда излучения от одного штриха не зависит от угла и пропорциональна его длине. В результате вы получите зависимость интенсивности от угла для щели.

7. Пусть теперь каждый период дифракционной решетки представляет собой щель ширины b . (Оставшееся место занято непрозрачным экраном ширины $d - b$). Найдите зависимость интенсивности от угла θ для такой решетки. (Число штрихов опять равно N).

8. Найдите интенсивность главного максимума порядка m .

9. Постройте качественный график зависимости интенсивности от $\sin \theta$ для случая, когда $kd \gg 1$ и ширина щели $b = \frac{d}{20}; \frac{d}{2}; \frac{d}{3}$.

10. Рассмотрим максимум порядка m . Пусть ему соответствует угол θ_0 . Ближайшему к этому максимуму минимуму соответствует угол $\theta_0 + \delta\theta_1$. Найдите $\delta\theta_1$ считая что $N \gg 1$.

Пусть теперь на дифракционную решетку падает свет, содержащий две близких длины волны λ и $\lambda + \delta\lambda$. Интерференционные картины от этих двух волн наложатся друг на друга и при очень маленьких значениях $\delta\lambda$ нельзя будет заметить наличие двух разных длин волн. Изучим, при каком минимальном значении $\delta\lambda$ еще можно заметить, что имеется две линии, проанализировав интенсивность, наблюдаемую на экране. Будем считать, что $N \gg 1$.

11. Покажите, что вблизи главного максимума для длины волны λ зависимость интенсивности от угла можно представить в виде

$$I = A \left(\frac{\sin \psi}{\psi} \right)^2$$

где $\psi = \alpha\delta\theta = \alpha(\theta - \theta_0)$, под углом θ_0 наблюдается главный максимум, а сама формула годится при $\delta\theta \sim \delta\theta_1$ и не годится при $\delta\theta \gg \delta\theta_1$. Здесь A и α – некоторые постоянные.

12. Пусть на дифрешетку падает две близких друг к другу длины волны. Покажите, что суммарная интенсивность вблизи главного максимума имеет вид

$$I = Af(\psi) = A \left(\frac{\sin \psi}{\psi} \right)^2 + A \left(\frac{\sin(\psi - \psi_1)}{\psi - \psi_1} \right)^2$$

Можно пренебречь зависимостью параметра α от длины волны и считать, что он одинаков для обеих волн.

13. Постройте качественный график функции $f(\psi)$ из предыдущего пункта при $\psi_1 = 1$ и при $\psi_1 = 6$.

Для того, чтобы была возможность определить наличие двух длин волн в спектре с помощью дифракционной решетки (разрешить эти две длины волны), зависимость интенсивность от угла должна иметь два максимума, отвечающих этим двум линиям. Между этими максимумами должен быть минимум, иначе будет казаться, что имеется только одна длина волны. Из соображений симметрии очевидно, что если у функции $f(\psi)$ есть минимум при $0 < \psi < \psi_1$, то ему отвечает значение $\psi = \psi_1/2$.

14. Найдите численно минимальное значение ψ_1 , при котором минимум в точке $\psi_1/2$ действительно возникает.

15. Согласно критерию Релея, две длины волны еще можно различить, если главный максимум, отвечающий одной из них, накладывается на ближайший к этому главному максимуму минимум для другой. При каком значении ψ_1 можно различить две длины волны согласно критерию Релея? Покажите, что это значение ψ_1 согласуется с вашими результатами в предыдущем пункте.

16. Пусть разность длин волн соответствует критерию Релея. Найдите отношение значения интенсивности в главном максимуме к значению интенсивности в минимуме между двумя максимумами.

17. Отношение $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ называется разрешающей способностью спектрального прибора. Найдите разрешающую способность дифракционной решетки с N штрихами, если наблюдения производятся в максимуме порядка m .