

Задача-лекция. Неидеальные источники

Введение.

Цель данной задачи – рассказать вам про интерференцию света от неидеальных источников. В отличие от типичной межнарской задачи, эта задача весьма user-friendly. Сделав одну ошибку, вы не потеряете половину дальнейших результатов. Поэтому не бойтесь и смело считайте!

Если совсем не понимаете что делать, задавайте вопросы.

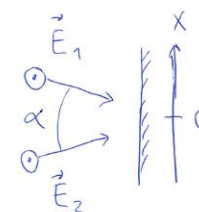
Часть А. Повторение.

A1. Рассмотрите сумму двух колебаний

$$E = A \cos \omega t + B \cos(\omega t + \varphi)$$

Вычислите интенсивность $I = \langle E^2 \rangle$, угловые скобки означают усреднение по времени. Отдельно напишите ответ в частном случае $A = B$.

Рассмотрим некоторую интерференционную схему, в результате которой на экран падают два луча, сходящиеся под углом α (рис 1). Будем считать, что источник света **идеальный: точечный и монохроматический**.



Видностью (резкостью) интерференционной картины называется следующее число

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

где I_{max} – интенсивность максимумов, I_{min} – интенсивность минимумов. При $V = 1$ интерференционные полосы предельно четкие, при $V = 0$ на экране наблюдается равномерная засветка, и полос нет.

A2. Пусть амплитуды волн равны, $E_1 = E_2 = A$. Векторы электрического поля направлены перпендикулярно плоскости рисунка. Напишите как зависит освещенность $I(x)$ экрана от координаты x вдоль экрана (можете не следить за общим множителем). Найдите расстояние Δ между соседними максимумами. Постройте график $I(x)$. Вычислите видность картины.

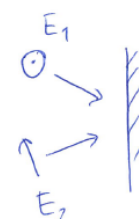
В реальности есть несколько причин, которые могут испортить интерференционную картину. Это:

- разные интенсивности интерферирующих лучей (пункт A4)
- разные поляризации (пункт A5)
- ненулевые размеры источника (часть B)
- немонохроматичность источника (части C, D)

Сейчас мы их исследуем по-отдельности.

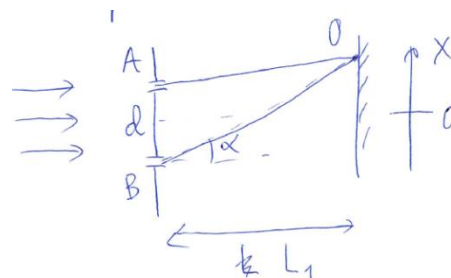
A3. Теперь амплитуды волн различны, $E_1 = A$, $E_2 = B$. Снова вычислите освещенность $I(x)$, расстояние Δ и видность V . Положив $A = 1$, постройте график $V(B)$.

A4. Теперь амплитуды волн равны, $E_1 = E_2 = A$, но поляризации различны: вектор \vec{E}_1 перпендикулярен плоскости рисунка, вектор \vec{E}_2 лежит в плоскости рисунка (рис 2). Снова вычислите освещенность $I(x)$, расстояние Δ и видность V .



Часть В. Пространственная когерентность.

Рассмотрим интерференционную схему Юнга. Свет от удаленного источника падает на 2 узких щели (рис 3).



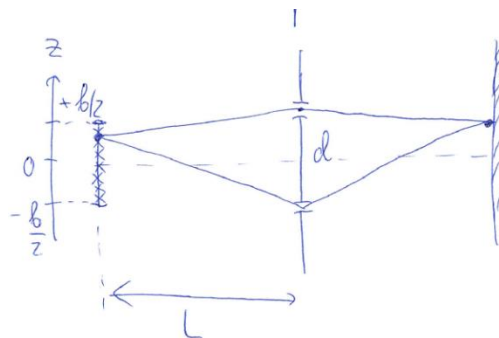
В1. Найдите $\delta(x)$ – разность хода между лучами АО и ВО (за щелями). Считайте $L_1 \gg d$.

В дальнейшем все ответы выражайте через δ . Это позволяет забыть про геометрию эксперимента. Полученные результаты будут применимы к произвольной интерференционной схеме.

В2. Рассмотрим точечный источник, расположенный на оси симметрии установки. Найдите освещенность экрана $I(\delta)$.

Теперь рассмотрим протяженный источник, интенсивности I_0 , который имеет конечный размер b (рис 4). Источник монохроматический, $k = \frac{\omega}{c}$ дано.

Пусть он расположен симметрично относительно щелей (рис 4). Введем z – координату вдоль источника.



В3. Найдите полную разность хода δ_1 двух лучей от точки z до точки экрана x . Пользуйтесь тем что $L \gg b \gg d$. Представьте ее в виде (восстановите полностью формулу)

$$\delta_1(x) = \delta(x) + \text{const} * z$$

В4. Для начала получим ответ «на пальцах». Разделим источник на два источника размером $b/2$, и каждый из них заменим на точечный источник, расположенный в его центре. Итак, у нас есть 2 точечных источника в точках $z = \pm \frac{b}{4}$. Когда разности хода удовлетворяют соотношению

$$\delta_1\left(z = \frac{b}{4}\right) - \delta_1\left(z = -\frac{b}{4}\right) = \frac{\lambda}{2},$$

в каждой точке экрана максимумы интерференции 1го источника накладываются на минимумы от 2го источника, и наоборот. В итоге наблюдатель увидит на экране равномерную засветку, т.е. интерференции не будет. Найдите соотношение между b, d, λ, L при этом.

В5. Разобьем источник на много маленьких источников длиной dx каждый. Интенсивность каждого маленького источника равна

$$dI = I_0 \frac{dx}{b}$$

Все маленькие источники независимы, поэтому излучают некогерентно. Поэтому нужно складывать интенсивности интерференций от разных источников. Представьте результирующую интенсивность в виде (восстановите полностью формулу)

$$I(\delta) = \int \text{const} * (1 + \cos k\delta_1) dz$$

B6. Вычислите интеграл и представьте интенсивность в виде

$$I(\delta) = 2I_0(1 + f(\psi) \cos k\delta)$$

где $\psi = \frac{b}{L}$ - угловой размер источника. Не пугайтесь того что формула 4-этажная, сейчас мы ее упростим.

B7. В оптике очень полезна функция (кардинальный синус)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Постройте график этой функции.

B8. Вычислите видность интерференционной картины $V(\psi)$. Найдите минимальный угловой размер источника ψ_1 , при котором $V = 0$, т.е. полосы исчезают. Сравните результат с п. B4.

Если размеры источника позволяют наблюдать интерференционные полосы в данном эксперименте ($\psi < \psi_1$), такой источник называется **пространственно когерентным**.

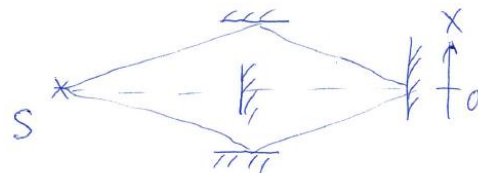
B9. На одном рисунке постройте качественные графики интенсивности $I(\delta)$ при

$$\psi = 0, \psi = \frac{\psi_1}{4}, \psi = \frac{\psi_1}{2}, \psi = \psi_1.$$

B10. В реальном эксперименте часто размер источника задан (например, источником является Солнце). Найдите ограничение на d (расстояние между щелями), при котором будет наблюдаться интерференция.

Часть С. Немонохроматический источник (дублет натрия)

Рассмотрим интерференционную схему Ллойда (рис 5). Свет от источника S отражается в двух плоских зеркалах. Прямой свет от источника загорожен непрозрачной ширмой.



C1. Найдите разность хода двух лучей $\delta(x)$.

C2. Вспомните результат п. B2.

Теперь рассмотрим немонахроматический источник, который излучает сигнал

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_1 t) + E_0 \cos(\omega_2 t)$$

на двух близких частотах, $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$. Определим $k_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2c}$, $\Delta k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{c}$. Волны разных частот некогерентны. Поэтому нужно вычислить интенсивность двухлучевой интерференции на каждой частоте (это сделано в предыдущем пункте), после чего сложить интенсивности от разных частот $I = I(\omega_1) + I(\omega_2)$.

C3. Вычислите освещенность экрана $I(\delta)$.

C4. Вычислите видность интерференционной картины $V(\delta)$.

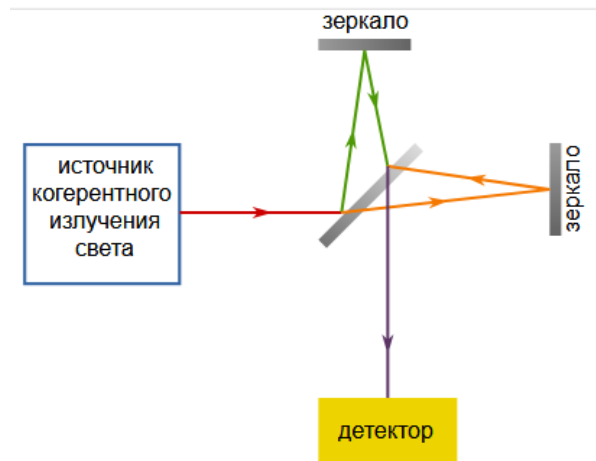
C5. Найдите минимальную разность хода δ_1 , при которой полосы исчезают: $V(\delta_1) = 0$.

C6. Постройте качественный график освещенности экрана $I(\delta)$. Учитывайте что $\Delta k \ll k_0$.

C7. Найдите число полос, которые наблюдаются на экране в диапазоне $0 < \delta < \delta_1$.

Часть D. Временная когерентность

Рассмотрим интерферометр Майкельсона (рис 6). Свет падает на полупрозрачную пластину П, после чего отражается от двух зеркал, возвращается к пластине, и попадает в приемник. Разность расстояний от пластины до зеркал равна Δx , ее можно изменять в процессе эксперимента.



D1. Найдите разность хода $\delta(\Delta x)$ двух лучей.

D2. Вспомните результат п. B2.

Теперь рассмотрим некогерентный источник, который излучает целый набор частот

$$E(t) = \int f(\omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

Волны разных частот некогерентны, поэтому полную интенсивность источника можно представить в виде

$$I_0 = \int I_\omega d\omega$$

где функция $I_\omega = \frac{1}{2} f(\omega)^2$ называется спектральной плотностью излучения, или попросту спектром. Спектр является важной характеристикой источника.

Рассмотрим интерференцию от источника с плоским спектром, $I_\omega = \frac{I_0}{\Delta\omega}$ (рис 7), причем $\Delta\omega \ll \omega_1$. Определим $k_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2c}$, $\Delta k = \frac{\Delta\omega}{c}$. Волны разных частот не когерентны. Поэтому нужно вычислить интенсивность двухлучевой интерференции на каждой частоте (это сделано в предыдущем пункте), после чего проинтегрировать по частоте



$$I(\delta) = \int I_\omega (1 + \dots) d\omega$$

D3. Восстановите полностью формулу.

D4. Вычислите интеграл и представьте результат в виде

$$I(\delta) = 2I_0(1 + \text{sinc}(\dots) \cos k\delta)$$

D5. Вычислите видность интерференционной картины $V(\delta)$. Постройте график $V(\delta)$.

D6. Найдите минимальную разность хода δ_1 , при которой полосы исчезают: $V(\delta_1) = 0$.

D7. Постройте качественный график освещенности экрана $I(\delta)$. Учитывайте что $\Delta k \ll k_0$.

D8. Найдите число полос, которые наблюдаются на экране в диапазоне $0 < \delta < \delta_1$.