Домашнее задание №2. Математика

1 Формула Тейлора

Часто в физических задачах присутствует малый параметр. Тогда оказывается, что «хорошие» функции этого параметра можно приблизить при помощи более простых функций. Частный случай такого приближения — замена функции на линейную. Так, возможно, вам уже встречались соотношения типа $\sin x \approx x$ или $\tan x \approx x$, справедливые при малых x. В общем виде линейное приближение записывается как

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

Здесь $f'(x)$ обозначает производную функции в соответствующей точке, а само приближение применимо при достаточно малых значениях Δx. Так, например, при $|x| < 0.3$ погрешность формулы $\sin x \approx x$ не превышает 1.5%.

Линейное приближение (1) может оказаться недостаточным. Например, может оказаться, что $f'(0) = 0$. Тогда потребуется учитывать следующие поправки, содержащие более высокие степени x. В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать функции при малых значениях x и вместо отклонения Δx использовать само x. Тогда оказывается, что функцию можно приблизить с помощью следующего многочлена:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

Этот результат и называется формулой Тейлора. Заметим, что если функция $f(x)$ сама является многочленом степени не выше n, формула (2) становится точной. В частности при рассмотрении равноускоренного движения все производные координаты по времени выше второго порядка тождественно равны нулю по определению. После соответствующего изменения обозначений формула (2) переходит в уравнение равноускоренного движения.

На практике вам скорее всего придется использовать формулу Тейлора с не очень большим числом членов для вычисления некоторой величины с разумной точностью. В этой ситуации,как правило, каждый следующий член разложения должен быть меньше предыдущего, а погрешность результата — меньше последнего из членов. При желании можно оценить точность приближения, оценив величину первого отброшенного члена разложения.

Однако рассматривая бесконечное количество членов (в этом случае обычно говорят про ряд Тейлора) можно получить сколь угодно точные значения функции при конечных значениях x. Когда формула понимается как точная ее записывают в несколько другом виде, а именно как сумму бесконечного числа слагаемых, которая в точности равна рассматриваемой функции:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots.$$

Поэтому с помощью анализа ряда Тейлора можно получать и точные соотношения между функциями.

Для простых элементарных функций явный вид формулы Тейлора можно получить непосредственным вычислением производных в требуемой точке. Таким образом можно найти следующие разложения

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \\
\log(1+x) &= x - \frac{x2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots, \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + \dots + \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!}x^n + \dots, \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots,
\end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots .$$

В подробностях вывода этих формул вам предлагается разобраться самостоятельно. В дальнейшем их можно считать известными.

Комбинируя уже известные разложения, можно получать приближения для более сложных функций. Как правило, этот метод проще непосредственного вычисления производных. Мы будем находить только первые несколько членов разложения, найти общую формулу для коэффициента перед x^n чаще всего не удается. Рассмотрим пример:

$$\frac{1}{1+2x+\sin^2 x} \approx 1 - (2x+\sin^2 x) + (2x+\sin^2 x)^2 \approx 1 - (2x+x^2) + 4x^2 = 1 - 2x + 3x^2.$$

Здесь мы производили все вычисления с точностью до членов порядка x^2.

Если выражение имеет вид $f(x)^{g(x)}$, для разложения по степеням x удобно преобразовать его:

$$f(x)^{g(x)} = e^{(g(x)\log f(x))}.$$

Например

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) \approx \exp\left(1-\frac{x}{2}\right) \approx e\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

Мы ограничились линейным приближением. Попутно мы вычислили хорошо известный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

как значение функции при нулевом аргументе.

Рассмотрим также пример разложения функции, которая обращается в бесконечность при $x=0$.

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \approx \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}} \approx \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^4}{36}\right) \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}.$$

Полученное выражение не является формулой Тейлора, так как содержит член $1/x$, однако является хорошим приближением для $\cot x$ при малых x. Функция $\cot x - 1/x$ не имеет особенности при $x = 0$. Непосредственное вычисление производных этой функции в нуле крайне затруднительно, однако из найденного разложения их легко найти.

Наконец заметим, что если каким-нибудь образом удалось для функции получить разложение вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

то дифференцируя и интегрируя это разложение можно получить соответствующие разложения для производной и интеграла

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$$
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3 + \frac{1}{4}a_3 x^4 + \ldots .$$

Например

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \approx \int_0^x (1-t+t^2)\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2 Комплексные числа

Комплексные числа — обобщение действительных чисел, которое получается добавлением к действительным числам специального числа i (*мнимой единицы*). Это число удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$. Тогда любое комплексное число имеет вид $z = x + iy$. Такая форма записи называется *алгебраической формой* комплексного числа, а вещественные числа $x = Re\, z$ и $y = Im\, z$ — *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z соответственно. Комплексное число однозначно задается своими действительной и мнимой частями. Действительные числа — подмножество множества комплексных чисел. У чисел этого подмножества мнимая часть равна нулю.

Арифметические операции можно проводить с использованием обычных свойств этих операций и тождества $i^2 = -1$. Таким образом получаем

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) + i^2 y_1y_2 = (x_1x_2 - x_1x_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Комплексное число $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ называется комплексно сопряженным для числа z. Также для сопряженного числа используется обозначение $z^* = \bar{z}$. Легко убедиться в том, что верны тождества $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ и $\overline{z_1^{-1}} = \overline{z_1}^{-1}$. Операцию комплексного сопряжения можно переставлять с арифметическими операциями. Произведение комплексного числа на его сопряженное всегда вещественно: $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Так при выводе формулы для частного двух комплексных чисел мы умножили числитель и знаменатель на число, сопряженное числу в знаменателе. После этого получилась дробь с вещественным знаменателем.

Величина $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа z. Угол $\varphi = arg\, z$, удовлетворяющий условиям $\cos\varphi = x/|z|$ и $\sin\varphi = y/|z|$, называется *фазой* комплексного числа z. Заметим, что фаза определена неоднозначно, так как к ней всегда можно добавить число вида $2\pi n$, где n целое. С помощью этих определений комплексное число можно записать в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — *тригонометрическая форма* записи комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа проясняет смысл умножения комплексных чисел. А именно модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а одно из возможных значений фазы произведения — сумма фаз множителей:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2); \\ z = z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \qquad |z| = |z_1| \cdot |z_2|,\ argz = argz_1 + argz_2. \end{aligned}$$

В этом легко убедиться используя формулы для тригонометрических функций суммы и разности.

Оказывается, что формула Тейлора справедлива и для хороших функций комплексного переменного. На самом деле это утверждение несколько тавтологично, так как «хорошие» функции иногда определяются как такие, для которых верна формула Тейлора. Так функция $f(z) = \bar{z}$ не является хорошей в смысле данного определения. Однако рациональные функции z (но не содержащие $\bar{z}$) являются хорошими.

Определим экспоненту от комплексного числа с помощью соотношения $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Пусть z — чисто мнимое число, то есть $Re\, z = x = 0$. Тогда наше определение сводится к $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ (формула Эйлера). Убедимся в том, что это определение согласуется с рядом Тейлора для экспоненты

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots = \left(1 + i^2\frac{y^2}{2} + \dots + i^{2n}\frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) + \\ &+ i\left(y + i^2\frac{y^3}{6} + \dots + i^{2n}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right) = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \dots + (-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) + \\ &+ i\left(y - \frac{y^3}{6} + \dots + (-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right) = \cos y + i\sin y. \end{aligned}$$

Из ряда Тейлора для экспоненты также следует тождество $e^{x+y} = e^x e^y$. Таким образом, из предположения о применимости формулы Тейлора для экспоненты комплексной переменной следует приведенное выше определение через тригонометрические функции. С помощью комплексной экспоненты можно записать $z = |z|e^{iarg\, z}$ — *показательная форма* записи комплексного числа.

Дифференцирование и интегрирование комплексной функции *вещественного* аргумента сводится к интегрированию ее вещественной и мнимой части:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_1(t) + if_2(t)) &= \frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}, \\ \int(f_1(t) + if_2(t))\,\mathrm{d}t &= \int f_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int f_2(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

В этих формулах t — вещественная переменная. С помощью этого соотношения можно и определения убедиться в том, что для экспоненты с комплексным показателем верна обычная формула дифференцирования $\mathrm{d}(\exp(\lambda t))/\mathrm{d}t = \lambda \exp(\lambda t)$ (λ — комплексное число). Обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций применимо и для функций с комплексными значениями.

Применения комплексных чисел

Тождество для экспоненты от суммы аргументов проще, чем соответствующие формулы для тригонометрических функций. Из формулы Эйлера следует, что для вещественных φ верны соотношения $\sin\varphi = Im\, e^{i\varphi}$ и $\cos\varphi = Re\, e^{i\varphi}$. А для произвольных x верно $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. С помощью этих тождеств можно упрощать тригонометрические выражения.

Пример 1. Выведем формулу понижения степени

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{16} + \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Пример 2. Вычислим сумму

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{k=N} \cos kx = \sum_{k=0}^{k=N} Re\, e^{ikx} = Re \sum_{k=0}^{k=N} e^{ikx} = Re\, \frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \\ = Re\, e^{iNx/2}\frac{e^{-(N+1)ix/2}-e^{(N+1)ix/2}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}} = \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}\sin\frac{Nx}{2}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии. Из этого решения видно, что часто бывает удобно вычислять вещественную часть не с помощью общего метода деления комплексных чисел, а преобразовав выражение к удобному виду.

Пример 3. Пусть зависимость некоторой величины от времени имеет вид

$$x(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Найдем максимальное значение (амплитуду) колеблющейся величины. Для этого представим ее как вещественную часть суммы двух комплексных экспонент:

$$x(t) = Re\,\left(A_1 e^{i\omega t + i\varphi_1} + A_2 e^{i\omega t+i\varphi_2}\right) = Re\,\left(A_1e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right)e^{i\omega t} = Re\, Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь $Ae^{i\varphi} = A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}$ — комплексная амплитуда колебания. Модуль комплексной амплитуды как раз и является амплитудой (обычной) колебания. Приведенное выше рассуждение показывает, что если колебание является суммой двух колебаний, то комплексная амплитуда этого колебания — сумма комплексных амплитуд отдельных колебаний. Чтобы получить ответ вычислим модуль числа путем умножения его на сопряженное:

$$\begin{aligned}A^2 = A\bar{A} = \left(A_1e^{i\varphi_1}+A_2e^{i\varphi_2}\right)\left(A_1e^{-i\varphi_1}+A_2e^{-i\varphi_2}\right) = \\ = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\left(e^{i\varphi_2-i\varphi_1}+e^{i\varphi_1-i\varphi_2}\right) = A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2).\end{aligned}$$

Заметим, что этот же результат можно было бы получить и с помощью векторных диаграмм.

Пример 4. Вычислим 11-ю производную функции $f(t) = e^{2t}\sin t$. Для этого запишем ее как мнимую часть комплексной экспоненты $f(t) = Im\, e^{(2+i)t}$.

$$f^{(11)}(t) = (Im\, e^{(2+i)t})^{(11)} = Im\,(e^{(2+i)t})^{(11)} = Im\,\left((2+i)^{11}e^{(2+i)t}\right) = Im\, A^{11}e^{(2+i)t+11i\varphi} = A^{11}e^{2t}\sin(t+11\varphi).$$

Здесь $A = \sqrt{5}$ и $\varphi = \arctan(1/2)$ — модуль и аргумент комплексного числе $2+i$. С помощью аналогичных соображений можно вычислять и интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции и экспоненты.

3 Приближенное решение уравнений

При решении задач часто возникают уравнения с численными коэффициентами, которые не удается решить аналитическими методами. В таком случае можно найти корни уравнения с помощью численных методов. Рассмотрим некоторые из них.

x	$e^{\cos x} - e^x \sin x$
2	-6.059
4	41.840
3	-2.463
3.5	12.008
3.1	-0.555
3.2	1.801
3.12	-0.12099
3.13	0.10274
3.125	-0.00969964
3.1254	-0.000746759
3.1255	0.00149261

Таблица 1: Деление отрезка

Методы деления отрезка

Пусть нам нужно решить уравнение $f(x) = 0$ для некоторой заданной функции $f(x)$. Для начала нужно локализовать корень, то есть найти какой-нибудь отрезок $[a, b]$, на котором находится интересующий нас корень. Можно построить качественный график рассматриваемой функции или воспользоваться физическими соображениями. Так если $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (или наоборот), а $f(x)$ непрерывна, то $[a, b]$ содержит хотя бы один корень.

После нахождения отрезка $[a, b]$ возьмем внутри него точку c и из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ выберем тот, внутри которого содержится корень. Для этого нужно вычислить значение функции в точке c и выбрать тот из отрезков, на концах которого значения функции имеют противоположный знак.

Продолжая эту процедуру будем получать отрезки, содержащие корень, все меньшей и меньшей длины. Нужно остановиться, когда будет достигнута требуемая точность. При записи решения методом деления удобно использовать таблицу с двумя колонками, которые содержат использованные значения аргумента и соответствующие им значения функции.

Простейший метод выбор точки c — на каждом шаге брать середину рассматриваемого отрезка $c = (a + b)/2$. Этот метод — *метод половинного деления* — хорошо работает для произвольных функций, однако является достаточно медленным.

Этот метод можно существенно ускорить, если воспользоваться линейным приближением для функции

$$f(x) \approx f(a) + (f(b) - f(a))\frac{x - a}{b - a}$$

и в качестве c использовать нуль этого выражения (*метод хорд*):

$$c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

На практике может оказаться удобнее оценивать приближенное значение c при помощи значений функции в точках a и b не проводя явных вычислений. Метод хорд особенно хорошо работает для плавно изменяющихся функций и не очень больших размерах отрезка, когда линейное приближение для функции становится хорошим.

Метод итераций

Пусть уравнение, которое нужно решить, удалось привести к виду $x = g(x)$. Возьмем какое-нибудь значение x_0, желательно, достаточно близкое к искомому корню. Построим последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ с помощью соотношений $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$ и так далее, $x_{n+1} = g(x_n)$. Это легко сделать на калькуляторе, если записать функцию $g(x)$ через ANS — предыдущий результат. Если окажется, что числа x_n стремятся к числу x_*, то оно является корнем уравнения. Для сходимости необходимо, чтобы в некоторой окрестности корня выполнялось неравенство $|f'(x)| < 1$, чем меньше производная, тем лучше сходимость. То, к какому именно корню сойдется последовательность, зависит от выбора начальной точки и от самой функции g.

В принципе, любое уравнение можно свести к виду $x = g(x)$. Например из $f(x) = 0$ следует $\lambda f(x)+x = x$. Путем подходящего выбора постоянной λ можно даже сделать производную в окрестности корня малой. На практике нет никакого универсального способа приведения уравнения к виду $x = g(x)$. Однако если это удалось сделать, а также удалось обеспечить сходимость метода к нужному корню, метод итераций является наиболее удобным методом нахождения корня. Проблему большой производной можно пытаться решить взяв обратную функцию и переписав уравнение $x = g^{-1}(x)$. В противном случае лучше использовать деление отрезка.

Примеры

Пример 1. Решим уравнение $e^x - 5x^2 - 1 = 0$ при $x > 0$. Перепишем уравнение в виде $x = \log(5x^2 + 1)$. Из рассмотрения графиков этих функций следует, что положительный корень только один. Логарифм — достаточно «медленная» функция, можно ожидать, что производная будет мала. Воспользуемся методом итераций. Возьмем начальное значение $x_0 = 3$. Находим $x \approx 4.723434661$. Здесь все знаки точные, а ответ получен примерно за 20 итераций.

Пример 2. Найдем корень уравнения $e^{\cos x} - e^x \sin x$ на отрезке $[2, 4]$ методом деления отрезка. Вычисления приведены в таблице 1. Находим корень $x = 3.1254$. Как правило, требуется меньшая точность. Поскольку экспонента меняется быстро, использовать метод хорд нецелесообразно, лучше использовать деление отрезка пополам. Если видно, что корень близок к одному из концов отрезка, можно выбрать точку деления ближе к этому концу.

Уравнения с малым параметром

Пусть имеется уравнение $f(x) = 0$, аналитическое решение которого $x = x_0$ известно. Теперь рассмотрим уравнение, которое отличается от исходного малой добавкой $f(x, \varepsilon) = 0$. Здесь ε — малый параметр, при $\varepsilon = 0$ уравнение переходит в исходное. Иногда оказывается возможным вычислить поправки к решению используя их малость. В простейших случаях получается решение уравнение в виде ряда Тейлора по степеням ε.

Рассмотрим пример: $x = 1 + \varepsilon x^2$. Это квадратное уравнение, поэтому его можно решить и точно. Вместо этого будем искать решение в виде ряда по степеням ε:

$$x_1(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \dots.$$

Подставим разложение в уравнение, удерживая члены порядка не выше третьего:

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 = 1 + \varepsilon(a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)^2.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных значения ε, поэтому можно приравнивать коэффициенты перед соответствующими степенями ε. Таким образом находим:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_1 = a_0^2 = 1,\\
&a_2 = 2a_0a_1 = 2,\\
&a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 = 5.
\end{aligned}$$

Получаем следующее разложение для близкого к 1 корня:

$$x_1 = 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + \dots.$$

Точное выражение для корня

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Разлагая это выражение по степеням ε получим тот же самый ряд. Второй корень можно найти с помощью теоремы Виета.

4 Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение — уравнение на неизвестную функцию $x(t)$ вида

$$F(t,\, x(t),\, \dot{x}(t),\, \ddot{x}(t),\, \ldots,\, x^{(n)}(t)) = 0.$$

Наивысший порядок n производной неизвестной функции, входящий в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. В физике чаще всего встречаются уравнения первого или второго порядка. Так во второй закон Ньютона входит ускорение, то есть вторая производная координаты, поэтому он представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка.

Решение дифференциального уравнения порядка n вообще говоря зависит от n произвольных постоянных. Эти постоянные можно определить из начальных условий вида

$$x(t_0) = a_0,\, \dot{x}(t_0) = a_1,\, \ldots,\, x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

Физически это означает, что если в начальный момент времени задать координату и скорость тела, это однозначно определит действующую на тело силу, а значит и ускорение тела. С помощью этих данных можно вычислить координату и скорость тела через малый промежуток времени. Таким образом можно однозначно определить закон движения тела. В теории дифференциальных уравнений доказывается теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями, справедливая при определенных ограничениях на функцию F.

Пример. Простейшее дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = f(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет решение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение вида $\dot{x} = f(t)/g(x)$. Перепишем его в виде $g(x)\,\mathrm{d}x = f(t)\,\mathrm{d}t$ (разделим переменные) и проинтегрируем. Если $x(t_0) = x_0$

$$\int_{x_0}^{x} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Из этого уравнения (уже обычного, а не дифференциального!) можно (в принципе) выразить $x(t)$.

Частный случай уравнения с разделяющимися переменными — линейное однородное уравнение первого порядка. Это уравнение вида $\dot{x}(t) = x(t)f(t)$. Выполнив интегрирование, найдем $x(t) = x_0 \exp(\int_{t_0}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t)$.

Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x}(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{3}$$

называется *линейным* дифференциальным уравнением. Здесь $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\ldots$, $a_n(t)$, $f(t)$ — некоторые заданные функции. В случае, если $f(t) = 0$ при всех значениях t, это уравнения называется однородным, в противном случае — неоднородным. Однородное уравнение, получающееся из исходного заменой функции $f(t)$ на 0, то есть уравнение

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x}(t) + a_n(t)x(t) = 0, \tag{4}$$

будем называть однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (3). Заметим, что можно рассматривать уравнения такого вида и с комплексными функциями.

Решения линейных уравнений обладают следующими свойствами, в которых легко убедиться непосредственной подстановкой решений в уравнение:

1. Пусть уравнение однородное ($f(t) = 0$) и известны два его решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда любая функция вида $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ также является решением. Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные (вещественные или комплексные в зависимости от рассматриваемой задачи).

2. Пусть $x_0(t)$ — какое-нибудь решение неоднородного уравнения (3), а $x_1(t)$ — какое-нибудь решение соответствующего однородного уравнения (4). Тогда $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ — тоже решение неоднородного уравнения (3). Причем любое решение неоднородного уравнения может быть записано в виде суммы данного решения неоднородного уравнения (годится любое решение!) и решения однородного уравнения.

3. Следствие предыдущего утверждения: чтобы научиться решать линейные неоднородные уравнения, достаточно сделать две вещи. Во-первых, научиться находить какое-нибудь решение неоднородного уравнения. Во-вторых, научиться находить все решения соответствующего однородного уравнения.

4. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения уравнений вида (3), в правых частях которых стоят функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$:
$$a_0(t)x_1^{(n)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x}_1(t) + a_n(t)x_1(t) = f_1(t),$$
$$a_0(t)x_2^{(n)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x}_2(t) + a_n(t)x_2(t) = f_2(t).$$
Коэффициенты a в обоих случаях одинаковы. Тогда $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ — решение уравнения вида (3) с правой частью $f_1(t) + f_2(t)$ и теми же коэффициентами a.

5. Пусть все коэффициенты a вещественны. Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплексное решение уравнения (3). Тогда его вещественная и мнимая части (функции $x(t)$ и $y(t)$ соответственно) являются вещественными решениями уравнения (3).

6. Пусть коэффициенты a вещественны, функция в правой части $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ — комплексная, а $z(t) = x(t) + iy(t)$ — какое-нибудь комплексное решение уравнения. Тогда $x(t)$ и $y(t)$ — вещественные решения уравнений вида (3) с теми же коэффициентами a и правыми частями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно.

Займемся сначала решением однородных линейных уравнений. Однородное линейное уравнение первого порядка является также и линейным уравнением с разделяющимися переменными, оно решается методом предыдущего раздела. Если же порядок уравнения выше первого, решить его аналитически для произвольных функций $a_k(t)$ невозможно. Поэтому мы в дальнейшем не будем рассматривать общий случай, а только случай когда все функции $a_k(t) = a_k$ **являются на самом деле константами** — линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Оказывается, что для большого количества физических приложений рассмотрение этого случая оказывается достаточным. (Более того, в простейших случаях может быть достаточно уравнений второго порядка.) Итак, рассмотрим уравнение
$$a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{x}(t) + a_nx(t) = 0. \tag{5}$$
Будем искать решение в виде $x(t) = e^{\lambda t}$. После подстановки этой функции в уравнение получим алгебраическое уравнение на λ:
$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$
— *характеристическое уравнение.* У этого уравнения в общем случае имеется n различных решений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Если все коэффициенты уравнения a_k вещественны, то вместе для каждого комплексного решения λ его комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}$ также будет решением.

Тогда все комплексные решения уравнения (5) можно записать в виде
$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \ldots, C_ne^{\lambda_n t},$$
где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. (Примечание: ситуация сложнее, если два или более корня уравнения совпадают, в этом случае решениями являются также функции вида $t^ke^{\lambda t}$, k меньше кратности корня)

Вещественные решения можно получить, либо подходящим выбором постоянных C, либо воспользовавшись свойством 5 и взяв вещественную часть комплексного решения. Заметим, что если определять постоянные C с помощью вещественных начальных условий, автоматически получится вещественное решение.

Многие описанные выше в общем виде свойства проявляются уже на примере уравнения гармонических колебаний
$$\ddot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0.$$

Пользуясь описанным выше методом, получаем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Его решения $\lambda = \pm i\omega$. Тогда все комплексные решения дифференциального уравнения имеют вид

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Взяв вещественную часть этого выражения, получим все действительные решения:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t,\ a = Re(C_1 + C_2),\, b = Im(C_2 - C_1).$$

Этот же результат можно получить и иначе, с помощью свойства 5: так как имеется комплексное решение $e^{i\omega t}$, его вещественная и мнимая части $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ также являются решениями. Согласно свойству 1 любая их сумма с любыми коэффициентами — решение. Пусть нам заданы начальные условия $x(0) = x_0,\, \dot{x}(0) = v_0$. Из них находим

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right),\ C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)$$

Тогда решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} = x_0\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + v_0\frac{1}{2i\omega}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Рассмотрим теперь более сложный пример

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0.$$

Соответствующие значения $\lambda = -1 \pm i$. Общее комплексное решение

$$x(t) = C_1 e^{it-t} + C_2 e^{-it-t}.$$

Вещественное решение

$$x(t) = (a\cos t + b\sin t)e^{-t}.$$

Наконец, изучим неоднородные уравнения. Будем рассматривать случай, когда в правой части находятся только комбинации тригонометрических функций и экспонент. Здесь удобно использовать свойство 6 и вместо уравнения с тригонометрической функцией в правой части рассмотреть уравнение с комплексной экспонентой, вещественная (или, если это удобнее, мнимая) часть которой совпадает с нужной нам тригонометрической функции. Решение неоднородного уравнения можно искать в виде экспоненты с тем же показателем, что и в правой части, но с неизвестным коэффициентом. Для получения вещественного решения остается только взять вещественную часть полученного решения.

Рассмотрим этот метод на примере уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \cos t = Re e^{it}$$

Пусть $z(t)$ — решение уравнения

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 2z = e^{it}.$$

Тогда $x(t) = Re\, z(t)$ — решение исходного уравнения. Будем искать решение в виде $z(t) = Ae^{it}$. После подстановки в уравнение получим

$$(-1 + 2i + 2)Ae^{it} = e^{it},\ (2i + 1)A = 1,\ A = \frac{1 - 2i}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\varphi},\ \varphi = \arctan 2.$$

Соответствующее вещественное решение

$$x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(t - \varphi).$$

Произвольное решение неоднородного уравнения может быть получено как сумма этого решения и произвольного решения соответствующего однородного уравнения. Следовательно, произвольное вещественное решение имеет вид

$$x(t) = (a\cos t + b\sin t)e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(t - \varphi).$$

В заключение еще несколько замечаний. Если правая часть неоднородного уравнения содержит сумму различных тригонометрических функций, можно найти решение для каждой из этих функций в отдельности. Сложив эти решения, получим решение исходной задачи. Если правая часть имеет вид многочлена, можно искать решение неоднородного уравнения в виде многочлена той же степени. Если правая часть имеет вид многочлена, умноженного на экспоненту, решение можно искать в виде многочлена такой же степени, умноженного на такую же экспоненту. Ситуация несколько усложняется, если показатель степени экспоненты в правой части совпадает с одним из решений характеристического уравнения, в этом случае решение нужно искать в виде многочлена более высокой степени, умноженного на экспоненту. Если кратность корня λ равна 1, то и степень многочлена на 1 выше.

Задачи

Найдите первые три ненулевых члена разложения функций по формуле Тейлора по степеням x:

1. $\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}$.

2. $e^{\sin x+\cos x}$.

3. $\dfrac{1+\cos x}{1+\log(1+x)}$.

4. $\tan x$.

5. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

6. Найти первые 4 ненулевых члена разложения функции $e^{-1}(1+x)^{1/x}$ по степеням x.
7. Найти первые два члена разложения по степеням x функции

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}.$$

8. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

9. Выразите площадь S_N правильного N-угольника через N и радиус описанной окружности R. Рассматривая предел $N\to\infty$, получите приближенную формулу для S_N с точностью до второго неисчезающего порядка по степеням $1/N$.

Упростите следующие выражения и запишите их в алгебраической форме:

10. $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(1-i)^3}$.

11. $\dfrac{(1+2i)(1-6i)(3+2i)}{(4+i)(5+5i)}$.

12. $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i}-5\dfrac{1+2i}{2-i}+2}$.

Найдите тригонометрическую форму комплексного числа:

13. $\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$.

14. $e^{i\theta}+2$.

15. $\cos\theta+i\sin 2\theta$.

Решите уравнение в комплексных числах

16. $x^2+2ix+3=0$.

17. $\sin x=2$.

18. Найдите z^m+z^{-m} если $z+z^{-1}=2\cos\theta$ для целого m.
19. Найдите среднее значение функции $f(x)=\cos^{10}x+5\sin^8 x$ за период.
20. Вычислите сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx.$$

21. Вычислите интеграл

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,\ a>0.$$

22. Биения. Зависимость некоторой величины от времени задается формулой

$$x(t)=A_1\cos\omega_1 t+A_2\cos\omega_2 t,$$

причем разность частот двух колебаний мала: $0<\omega_1-\omega_2=\Delta\omega\ll\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$. В таком случае колебание можно приближенно записать в виде $x(t)=A(t)\cos(\omega t+\varphi(t))$. Мы считаем, что за один период колебаний $2\pi/\omega$ амплитуда $A(t)>0$ и фаза $\varphi(t)$ колебаний меняются слабо. Получите выражения для $A(t)$ и $\varphi(t)$ в рассматриваемом приближении. Постройте качественные графики. Отдельно рассмотрите случай близких амплитуд $A_1\approx A_2$ и случай, когда одна из амплитуд много больше другой.
23. Решите уравнение численно: $\cos x=x$.

24. Численно найдите решение уравнения $\sin x^2 + x\cos x^2 = 0$ на отрезке [1, 2].

25. Для определения числа π можно использовать тот факт, что $\pi/2$ — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$. Используя для $\cos x$ приближение в виде многочлена 6 степени по x, вычислите число π, сравните с точным значением.

26. Найдите с точностью до ε^3 ($\varepsilon \ll 1$) решение уравнения

$$x = 1 + \varepsilon x^3,$$

близкое к 1.

***27.** Для уравнения из предыдущего задания получите приближенную формулу для двух других корней уравнения. (Подсказка: эти корни можно представить в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$, причем первый разложения стремится к бесконечности при малых ε. Получите первые 3 неисчезающих члена разложения.) Сравните полученные оценки с непосредственным численным решением при $\varepsilon = 0.1$.

28. Тело массой m движется под действием силы вязкого трения $F = -m\gamma v$. Скорость тела в начальный момент времени v_0, координата равна 0. Найдите зависимость скорости $v(t)$ и координаты $x(t)$ от времени.

29. Тело массой m движется под действием силы трения $F = -m\gamma v^2$. Скорость тела в начальный момент времени v_0, координата равна 0. Найдите зависимость скорости $v(t)$ и координаты $x(t)$ от времени.

30. Решите уравнение

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = t$$

с начальными условиями $x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1$.

31. Решите уравнение

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 4\sin t - 5\cos t$$

с начальными условиями $x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 2$.

32. Решите уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

с начальными условиями $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$. Подсказка: в зависимости от значения $\gamma > 0$ возможно 3 различных случая.

33. Найдите решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t,$$

имеющее вид $x(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$. Постройте качественный график зависимостей $B(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

34. Решите уравнение

$$\ddot{x} - (1+a)\dot{x} + ax = 0$$

с параметром a и начальными условиями $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$. Перейдя в этом решении к пределу $a \to 1$ получите решение уравнения $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$, характеристическое уравнение которого имеет двукратный корень.

35. Решите уравнение

$$\dot{x} - x = e^{\lambda t}$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Перейдите в этом решении к пределу $\lambda \to 1$ и получите решение уравнения $\dot{x} - x = e^t$.

***36.** С помощью ряда Тейлора для экспоненты докажите тождество $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

***37.** Известно, что синус можно представить в виде бесконечного произведения

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \cdot \ldots .$$

Сравнивая это выражение с формулой Тейлора, получите выражение для сумм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

***38.** Вычислите произведение

$$\prod_{k=1}^{N-1} 2\sin\frac{\pi k}{N}.$$